Общие критерии оценивания

По результатам проверки каждого задания выставляется одна из следующих оценок (перечислены в порядке убывания):
«+» — задача решена полностью;
«±» — задача решена с недочетами, не влияющими на общий ход решения;
«∓» — задача не решена (например, в решении содержатся грубые ошибки), но имеются содержательные продвижения;
«−» — задача не решена;
за задачу, к решению которой участник не приступал, ставится оценка «0».

При подведении итогов учитывается только количество в целом решенных задач — задач, за которые поставлена оценка «+» или «±».

Комментарии по отдельным задачам

Задача 1. Дробь, не равная правильному ответу — не выше «∓».

Задача 2. Необходимо было найти все возможные ответы и доказать, что других нет. Приведен один ответ и проверено, что он не противоречит условию задачи — «∓». Переборное решение с неполным перебором — «∓».

Задача 3. В варианте II необходимо было найти все возможности для наименьшего из чисел, написанных на доске (т. е. 1, 86, 220, 285, 671). Если вместо этого найдено только какое наименьшее значение может принимать наименьшее из чисел, написанных на доске (т. е. 1), то за задачу ставится оценка не выше «∓». Аналогично для варианта III. В случае, если неверно понят вопрос в варианте II или III, но присутствует полное решение с неполным ответом (т. е. реально найдены все возможности для наибольшего/наименьшего из чисел, но из-за неправильного понимания условия, в качестве ответа выбрано только одно из них) — «±».

Неверное доказательство того, что n нечетное (например, из того, что $\frac{2016}{n} + \frac{n-1}{2}$ число целое делается вывод, что 2016 делится на n, а $n-1$ делится на 2) — не выше «∓».

Задача 5. Система правильно сведена к решению одного или нескольких квадратных уравнений, но дальше часть из решений найдена неверно — «±».

В результате неравносильных переходов без проверки получен неверный ответ — «∓».

Задача 6. Используются неверные основные триг. формулы — не выше «∓».

Вместо одного числа получен ответ типа πk, $\pi + 2\pi n$ и т. п. — не выше «∓».

Задача 7. Верный ответ (без верного доказательства) — «∓».

Задача 9. Имелось в виду, что номера участников — это последовательные натуральные числа от 1 до количества участников.

Не доказано, что номер больше приведенного быть не мог (например, утверждается, но не доказано, что какой-то способ действий «очевидно является оптимальным», «логично действовать именно так» и т. п.) — не выше «∓».

Задача 10. В условии имелось в виду тело, которое получается, если выкинуть из пирамиды лежащие внутри нее части шаров. Если вместо этого вычисляется объем тела, являющегося, наоборот, объединением пирамиды и шаров, оценка за это не снижается.
Арифметическая ошибка во в целом верном решении — «±».
Используются неверные формулы объема пирамиды или сферы — не выше «∓».

Вариант I

Задача 1. Представьте в виде несократимой дроби

$$7\frac{19}{2015}\times 6\frac{19}{2016}-13\frac{1996}{2015}\times 2\frac{1997}{2016}-9\times\frac{19}{2015}.$$

Ответ: 19/96.

Решение. *Первое решение.* Обозначим $a=19/2015$, $b=19/2016$. Тогда

$$7\frac{19}{2015}\times 6\frac{19}{2016}-13\frac{1996}{2015}\times 2\frac{1997}{2016}-9\times\frac{19}{2015}=(7+a)(6+b)-(14-a)(3-b)-9a=$$
$$=42+6a+7b+ab-42+3a+14b-ab-9a=21b=21\cdot\frac{19}{2016}=\frac{21\cdot 19}{21\cdot 96}=\frac{19}{96}.$$

Второе решение. После замены смешанных дробей на обыкновенные, получаем, что исходное выражение равно

$$\frac{14124}{2015}\cdot\frac{12115}{2016}-\frac{28191}{2015}\cdot\frac{6029}{2016}-\frac{171}{2015}=\frac{171112260-169963539-344736}{2015\cdot 2016}=$$
$$=\frac{803985}{2015\cdot 2016}=\frac{2015\cdot 21\cdot 19}{2015\cdot 21\cdot 96}=\frac{19}{96}.$$

Задача 2. В $1^{\text{а}}$ классе каждого ребенка попросили написать два числа: количество его одноклассников и количество его одноклассниц (именно в таком порядке; сам себя ребенок не считает). Каждый ребенок одно число написал правильно, а в другом ошибся ровно на 2. Среди ответов были получены такие: $(13,11)$, $(17,11)$, $(14,14)$. Сколько мальчиков и сколько девочек в классе?

Ответ: 15 мальчиков и 12 девочек.

Решение. *Первое решение.* Обозначим детей, давших ответы $(13,11)$, $(17,11)$, $(14,14)$ через А, Б, В соответственно. Заметим, что если в классе m мальчиков, то первое число в ответах девочек имеет ту же чётность, что и m, а в ответах мальчиков — противоположную. Следовательно, дети А и Б одного пола, а В — другого.

Первые числа в ответах А и Б отличаются на 4, значит, они оба неправильные. Таким образом, количество одноклассников у А и Б равно 15, а количество одноклассниц — 11.

Если А и Б — мальчики, то в классе 16 мальчиков и 11 девочек. При этом у девочки В тогда 16 одноклассников и 10 одноклассниц, и ее ответ $(14,14)$ противоречит условию. Значит, А и Б — девочки, и в классе 15 мальчиков и 12 девочек.

Второе решение. Пусть какой-то ребёнок написал числа (m,d). Если бы оба числа он написал правильно, то он бы написал один из четырёх вариантов: $(m-2,d)$, $(m+2,d)$, $(m,d-2)$, $(m,d+2)$. Тогда, если этот ребёнок — мальчик, то есть четыре варианта количества мальчиков и девочек в классе: $(m-1,d)$, $(m+3,d)$, $(m+1,d-2)$ и $(m+1,d+2)$. Аналогично, если этот ребёнок — девочка; возможные варианты в этом случае: $(m-2,d+1)$, $(m+2,d+1)$, $(m,d-1)$, $(m,d+3)$.

Таким образом, каждый из ответов даёт нам восемь вариантов, сколько мальчиков и девочек могло быть в классе, один из которых должен быть верным:
для $(13,11)$ это $(12,11)$, $(16,11)$, $(14,\ \ 9)$, $(14,13)$, $(11,12)$, $(15,12)$, $(13,10)$, $(13,14)$;
для $(17,11)$ это $(16,11)$, $(20,11)$, $(18,\ \ 9)$, $(18,13)$, $(15,12)$, $(19,12)$, $(17,10)$, $(17,14)$;
для $(14,14)$ это $(13,14)$, $(17,14)$, $(15,12)$, $(15,16)$, $(12,15)$, $(16,15)$, $(14,13)$, $(14,17)$.

Осталось заметить, что только вариант $(15,12)$ встречается во всех трёх строчках.

Задача 3. При каких натуральных $n>1$ найдутся n подряд идущих натуральных чисел, сумма которых равна 2016?

Ответ: При n, равном 3, 7, 9, 21 или 63.

Решение. Предположим, что для некоторого n нашлись n подряд идущих натуральных чисел a, $a+1, \ldots, a+(n-1)$, сумма которых равна 2016. Тогда $na+(n-1)n/2 = 2016$, или, после алгебраических преобразований, $n(2a+n-1) = 4032 = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 7$.

Заметим, что n и $2a+n-1$ имеют разную чётность. Поэтому, если n чётно, то n должно делится на $2^6 = 64$, откуда $n \geqslant 64$, $2a+n-1 \leqslant 4032/64 = 63$, что противоречит $2a+n-1 > n$.

Значит, n — нечётный делитель числа 4032, т.е. делитель числа 63. Проверим, что каждый из них подходит. Если $n = 3$: $2a+3-1 = 1344$, $a = 671$; если $n = 7$: $2a+7-1 = 576$, $a = 285$; если $n = 9$: $2a+9-1 = 448$, $a = 220$; если $n = 21$: $2a+21-1 = 192$, $a = 86$; если $n = 63$: $2a+63-1 = 64$, $a = 1$.

Задача 4. В треугольнике ABC с отношением сторон $AB : AC = 5 : 4$ биссектриса угла BAC пересекает сторону BC в точке L. Найдите длину отрезка AL, если длина вектора $4 \cdot \overrightarrow{AB} + 5 \cdot \overrightarrow{AC}$ равна 2016.

Ответ: 224.

Решение. Заметим, что по свойству биссектрисы треугольника $BL : LC = BA : AC = 5 : 4$, откуда $\overrightarrow{BL} = 5/9 \cdot \overrightarrow{BC}$. Теперь,

$$\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BL} = \overrightarrow{AB} + \frac{5}{9} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{5}{9}\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) = \frac{4}{9} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{5}{9} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{9}\left(4 \cdot \overrightarrow{AB} + 5 \cdot \overrightarrow{AC}\right).$$

Следовательно, $|AL| = 1/9 \cdot \left|4 \cdot \overrightarrow{AB} + 5 \cdot \overrightarrow{AC}\right| = 1/9 \cdot 2016 = 224$.

Задача 5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 & = & 19 \\ x^4 + x^2y^2 + y^4 & = & 931 \end{cases}.$$

Ответ: $(-5; -3)$, $(-3; -5)$, $(3; 5)$, $(5; 3)$.

Решение. Заметим, что $x^4 + x^2y^2 + y^4 = (x^2+y^2)^2 - x^2y^2 = (x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$. Таким образом, исходная система эквивалентна $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 & = & 19 \\ x^2 + xy + y^2 & = & 49 \end{cases}$.

Сделаем замену: $u = x + y$, $v = xy$. Тогда из первого уравнения получаем, что $u^2 - 3v = 19$, а из второго — $u^2 - v = 49$. Значит, $v = 15$, а $u^2 = 64$, $u = \pm 8$.

Следовательно, согласно теореме Виета, пара (x, y) — это корни уравнения $t^2 \pm 8t + 15 = 0$. Значит, (x, y) может быть только $(-5; -3)$, $(-3; -5)$, $(3; 5)$, $(5; 3)$. Легко видеть, что каждый из этих вариантов удовлетворяет исходной системе.

Задача 6. Вычислите $2 \operatorname{arctg} 2 + \arcsin \dfrac{4}{5}$.

Ответ: π.

Решение. *Первое решение.* Обозначим $\operatorname{arctg} 2$ через α, $\arcsin 4/5$ через β. Заметим, что $\beta \in (0, \pi/2)$, а $\operatorname{tg}^2 \beta = \sin^2 \beta/(1 - \sin^2 \beta) = 4^2/3^2$, откуда $\operatorname{tg} \beta = 4/3$; также $\operatorname{tg} \alpha = 2$, $\alpha \in (0, \pi/2)$.

Находим:

$$\operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{2 \cdot 2}{1 - 2^2} = -\frac{4}{3}$$

$$\operatorname{tg}(2\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}(2\alpha) + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg}(2\alpha) \operatorname{tg} \beta} = \frac{-4/3 + 4/3}{1 - (-4/3) \cdot (4/3)} = 0.$$

Наконец, поскольку $0 < \alpha < \pi/2$, $0 < \beta < \pi/2$, то $0 < 2\alpha + \beta < 3\pi/2$. Значит, $2\alpha + \beta = \pi$.

Второе решение. Отметим на координатной плоскости точки $O(0, 0)$, $A(3, 0)$, $B(3, 4)$, $C(-5, 10)$, $D(-5, 0)$. Поскольку угловой коэффициент прямой OB равняется $4/3$, а прямой BC — $-3/4$, получаем, что $\angle OBC = 90°$.

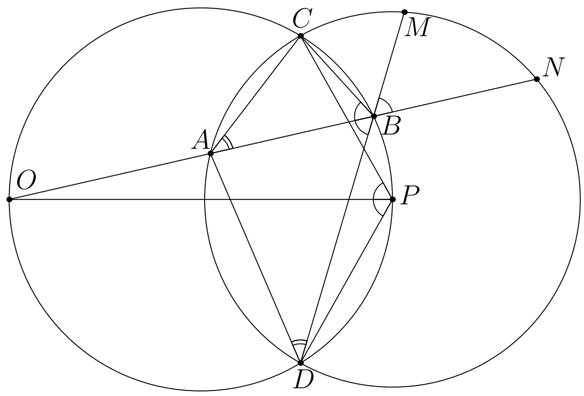
В треугольнике OAB: $\angle OAB = 90^\circ$, $AB = 4$, $BO = 5$; значит, $\angle AOB = \arcsin 4/5$. В треугольнике OBC: $\angle OBC = 90^\circ$, $BO = 5$, $BC = 10$; значит, $\angle BOC = \operatorname{arctg} 2$. В треугольнике OCD: $\angle ODC = 90^\circ$, $DO = 5$, $BC = 10$; значит, $\angle COD = \operatorname{arctg} 2$.

Таким образом, $\arcsin 4/5 + 2\operatorname{arctg} 2 = \angle AOB + \angle BOC + \angle COD = \angle AOD = \pi$.

Задача 7. Пусть OP — диаметр окружности Ω, ω — окружность с центром в точке P и радиусом меньше, чем у Ω. Окружности Ω и ω пересекаются в точках C и D. Хорда OB окружности Ω пересекает вторую окружностью в точке A. Найдите длину отрезка AB, если $BD \cdot BC = 5$.

Ответ: $\sqrt{5}$.

Решение. Пусть N — вторая точка пересечения прямой OA с ω; M — вторая точка пересечения прямой DB с ω.



Заметим, что в силу симметрии относительно прямой OP, дуги OC и OD равны. Следовательно, $\angle ABC = \angle DBA$. Обозначим этот угол через α.

Тогда, из вписанности четырёхугольника $CBPD$, $\angle CPD = \angle CBD = 2\alpha$. Следовательно, поскольку P — центр ω, $\breve{DA} + \breve{AC} = \breve{DAC} = 2\alpha$. С другой стороны, $\breve{DA} + \breve{MN} = 2\angle DBA = 2\alpha$. Вычитая общую дугу $\breve{DA}$, получаем, что $\breve{AC} = \breve{MN}$, откуда $\breve{AM} = \breve{CN}$.

Значит, $\angle CAB = \angle ADB$, и треугольники ABC и DBA подобны по двум углам, откуда $AB/BC = BD/AB$, или $AB^2 = BC \cdot BD = 5$, $AB = \sqrt{5}$.

Задача 8. При каких значениях параметра a уравнение $x^3 + ax^2 + 13x - 6 = 0$ имеет единственное решение?

Ответ: $(-\infty, -8) \cup (-20/3, 61/8)$.

Решение. Заметим, что $x = 0$ не является решением исходного уравнения. Поэтому оно равносильно уравнению $a = \dfrac{-x^3 - 13x + 6}{x^2}$ (*). Обозначим правую часть через $f(x)$.

Заметим, что $f(x) \to +\infty$ при $x \to -\infty$ и $f(x) \to -\infty$ при $x \to +\infty$. Также $f(x)$ имеет вертикальную асимптоту $x = 0$.

Производная функции $f(x)$ равна $f'(x) = -\dfrac{x^3 - 13x + 12}{x^3} = -\dfrac{(x-3)(x-1)(x+4)}{x^3}$.

Значит, функция $f(x)$ на промежутке $(-\infty, -4]$ убывает от $+\infty$ до $f(-4) = 61/8$; на промежутке $[-4, 0)$ — возрастает от $61/8$ до $+\infty$; на промежутке $(0, 1]$ — убывает от $+\infty$ до $f(1) = -8$; на промежутке $[1, 3]$ — возрастает от -8 до $f(3) = -20/3$; наконец, на промежутке $[3, +\infty)$ — убывает от $-20/3$ до $-\infty$.

Таким образом, каждое значение из промежутка $(-\infty; -8)$ функция $f(x)$ принимает ровно один раз; -8 — два раза; из промежутка $(-8; -20/3)$ — три раза; $-20/3$ — два раза; из промежутка $(-20/3; 61/8)$ — один раз; $61/8$ — два раза; из промежутка $(61/8; +\infty)$ — три раза. (Например, значение -8 функция примет один раз в точке 1, а второй раз — на промежутке $(3, +\infty)$).

Следовательно, уравнение (*), а с ним и исходное уравнение, имеет единственное решение при $a \in (-\infty, -8) \cup (-20/3, 61/8)$.

Задача 9. Федерация спортивной борьбы присвоила каждому участнику соревнования квалификационный номер. Известно, что во встречах борцов, квалификационные номера которых отличаются более, чем на 2 номера, всегда побеждает борец с меньшим номером. Турнир для 256 борцов проводится по олимпийской системе: в начале каждого дня бойцы разбиваются на пары, проигравший выбывает из соревнований (ничьих не бывает). Какой наибольший квалификационный номер может иметь победитель?

Ответ: 16

Решение. Заметим, что борец с номером k может проиграть только борцу с номером $k+1$ или $k+2$, поэтому после каждого тура наименьший номер не может увеличиться больше, чем на 2 номера. На турнире с 256 участниками 8 туров, следовательно, номер победителя турнира не превосходит $1+2\cdot 8=17$.

Предположим, что борец с номером 17 может победить. Тогда в первом туре должны выбыть борцы с номерами 1 и 2. Это возможно только если борец с номером 1 проиграл борцу с номером 3, а борец с номером 2 проиграл борцу с номером 4. Значит после первого тура борцы с номерами 3 и 4 останутся. Аналогично, после второго тура останутся борцы с номерами 5 и 6, после третьего — 7 и 8, ..., после седьмого — 15 и 16. Значит в последнем, финальном, бою встретятся борцы с номерами 15 и 16. Противоречие с предположением, что борец с номером 17 может победить.

Покажем, что борец с номером 16 может победить. Назовём борцов с номерами большими 16 *слабыми*. Пусть в туре с номером $k \leqslant 7$ борец с номером $2k-1$ проиграет борцу с номером $2k+1$, борец с номером $2k$ проиграет борцу с номером $2k+2$, борцы с номерами $2k+3, \ldots, 16$ победят каких-то слабых борцов, оставшиеся слабые борцы как-то сыграют между собой. Тогда после 7 туров останутся борцы с номерами 15 и 16, и в финальном бое борец с номером 16 победит.

Задача 10. Сторона основания правильной четырёхугольной пирамиды равна a, а высота — $a/2$. Найдите объём тела, ограниченного поверхностью этой пирамиды и сферами радиуса $a/3$ с центрами в вершинах основания этой пирамиды.

Ответ: $\dfrac{81-4\pi}{486}a^3$.

Решение. Рассмотрим куб со стороной a. Построим сферы радиуса $a/3$ с центрами во всех его вершинах. Объём V тела, ограниченного поверхностью куба и этими сферами равен $V=a^3-\dfrac{4}{3}\pi\left(\dfrac{a}{3}\right)^3=\dfrac{81-4\pi}{81}a^3$, поскольку объём общей части куба и шаров, ограниченных этими сферами, равен объёму шара радиуса $a/3$.

Соединим центр куба со всеми его вершинами. В результате получим 6 пирамид, удовлетворяющих условию задачи. Следовательно, искомый объём равен $\dfrac{V}{6}=\dfrac{81-4\pi}{486}a^3$.

Вариант II

Задача 1. Представьте в виде несократимой дроби

$$6\frac{16}{2015}\times 9\frac{17}{2016}-2\frac{1999}{2015}\times 17\frac{1999}{2016}-27\times\frac{16}{2015}.$$

Ответ: 17/224.

Решение. *Первое решение.* Обозначим $a = 16/2015$, $b = 17/2016$. Тогда

$$6\frac{16}{2015}\times 9\frac{17}{2016}-2\frac{1999}{2015}\times 17\frac{1999}{2016}-27\times\frac{16}{2015}=(6+a)(9+b)-(3-a)(18-b)-27a=$$
$$=54+9a+6b+ab-54+18a+3b-ab-27a=9b=9\cdot\frac{17}{2016}=\frac{9\cdot 17}{9\cdot 224}=\frac{17}{224}.$$

Второе решение. После замены смешанных дробей на обыкновенные, получаем, что исходное выражение равно

$$\frac{12106}{2015}\cdot\frac{18161}{2016}-\frac{6029}{2015}\cdot\frac{36271}{2016}-\frac{432}{2015}=\frac{219857066-218677859-870912}{2015\cdot 2016}=$$
$$=\frac{308295}{2015\cdot 2016}=\frac{2015\cdot 9\cdot 17}{2015\cdot 9\cdot 224}=\frac{17}{224}.$$

Задача 2. В $1^{б}$ классе каждого ребенка попросили написать два числа: количество его одноклассников и количество его одноклассниц (именно в таком порядке; сам себя ребенок не считает). Каждый ребенок одно число написал правильно, а в другом ошибся ровно на 4. Среди ответов были получены такие: $(15, 18)$, $(15, 10)$, $(12, 13)$. Сколько мальчиков и сколько девочек в классе?

Ответ: 16 мальчиков и 14 девочек.

Решение. *Первое решение.* Обозначим детей, давших ответы $(15, 18)$, $(15, 10)$, $(12, 13)$ через А, Б, В соответственно. Заметим, что если в классе m мальчиков, то первое число в ответах девочек имеет ту же чётность, что и m, а в ответах мальчиков — противоположную. Следовательно, дети А и Б одного пола, а В — другого.

Вторые числа в ответах А и Б отличаются на 8, значит, они оба неправильные. Таким образом, количество одноклассников у А и Б равно 15, а количество одноклассниц — 14.

Если А и Б — девочки, то в классе 15 мальчиков и 15 девочек. При этом у мальчика В тогда 14 одноклассников и 15 одноклассниц, и его ответ $(12, 13)$ противоречит условию. Значит, А и Б — мальчики, и в классе 16 мальчиков и 14 девочек.

Второе решение. Пусть какой-то ребёнок написал числа (m, d). Если бы оба числа он написал правильно, то он бы написал один из четырёх вариантов: $(m-4, d)$, $(m+4, d)$, $(m, d-4)$, $(m, d+4)$. Тогда, если этот ребёнок — мальчик, то есть четыре варианта количества мальчиков и девочек в классе: $(m-3, d)$, $(m+5, d)$, $(m+1, d-4)$ и $(m+1, d+4)$. Аналогично, если этот ребёнок — девочка; возможные варианты в этом случае: $(m-4, d+1)$, $(m+4, d+1)$, $(m, d-3)$, $(m, d+5)$.

Таким образом, каждый из ответов даёт нам восемь вариантов, сколько мальчиков и девочек могло быть в классе, один из которых должен быть верным:

для $(15, 18)$ это $(12, 18)$, $(20, 18)$, $(16, 14)$, $(16, 22)$, $(11, 19)$, $(19, 19)$, $(15, 15)$, $(15, 23)$;
для $(15, 10)$ это $(12, 10)$, $(20, 12)$, $(16, 6)$, $(16, 14)$, $(11, 11)$, $(19, 11)$, $(15, 7)$, $(15, 15)$;
для $(12, 13)$ это $(9, 13)$, $(17, 15)$, $(13, 9)$, $(13, 17)$, $(8, 14)$, $(16, 14)$, $(12, 10)$, $(12, 18)$.

Осталось заметить, что только вариант $(16, 14)$ встречается во всех трёх строчках.

Задача 3. На доске написано несколько (больше одного) последовательных натуральных чисел, сумма которых равна 2016. Чему может равняться наименьшее из этих чисел?

Ответ: 1, 86, 220, 285 или 671.

Решение. Предположим, что для некоторого n нашлись n подряд идущих натуральных чисел a, $a+1, \ldots, a+(n-1)$, сумма которых равна 2016. Тогда $na+(n-1)n/2 = 2016$, или, после алгебраических преобразований, $n(2a+n-1) = 4032 = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 7$.

Заметим, что n и $2a+n-1$ имеют разную чётность. Поэтому, если n чётно, то n должно делится на $2^6 = 64$, откуда $n \geqslant 64$, $2a+n-1 \leqslant 4032/64 = 63$, что противоречит $2a+n-1 > n$.

Значит, n — нечётный делитель числа 4032, т.е. делитель числа 63. Проверим, что каждый из них подходит, и найдём соответствующие значения a. Если $n=3$: $2a+3-1 = 1344$, $a = 671$; если $n = 7$: $2a+7-1 = 576$, $a = 285$; если $n = 9$: $2a+9-1 = 448$, $a = 220$; если $n = 21$: $2a+21-1 = 192$, $a = 86$; если $n = 63$: $2a+63-1 = 64$, $a = 1$.

Задача 4. В треугольнике ABC с отношением сторон $AB : AC = 4 : 3$ биссектриса угла BAC пересекает сторону BC в точке L. Найдите длину отрезка AL, если длина вектора $3 \cdot \overrightarrow{AB} + 4 \cdot \overrightarrow{AC}$ равна 2016.

Ответ: 288.

Решение. Заметим, что по свойству биссектрисы треугольника $BL : LC = BA : AC = 4 : 3$, откуда $\overrightarrow{BL} = 4/7 \cdot \overrightarrow{BC}$. Теперь,

$$\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BL} = \overrightarrow{AB} + \frac{4}{7} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{4}{7}\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) = \frac{3}{7} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{4}{7} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{7}\left(3 \cdot \overrightarrow{AB} + 4 \cdot \overrightarrow{AC}\right).$$

Следовательно, $|AL| = 1/7 \cdot \left|3 \cdot \overrightarrow{AB} + 4 \cdot \overrightarrow{AC}\right| = 1/7 \cdot 2016 = 288$.

Задача 5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 & = & 7 \\ x^4 + x^2y^2 + y^4 & = & 91 \end{cases}.$$

Ответ: $(-3;-1)$, $(-1;-3)$, $(1;3)$, $(3;1)$.

Решение. Заметим, что $x^4 + x^2y^2 + y^4 = (x^2+y^2)^2 - x^2y^2 = (x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$. Таким образом, исходная система эквивалентна $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 & = & 7 \\ x^2 + xy + y^2 & = & 13 \end{cases}$.

Сделаем замену: $u = x+y$, $v = xy$. Тогда из первого уравнения получаем, что $u^2 - 3v = 7$, а из второго — $u^2 - v = 13$. Значит, $v = 3$, а $u^2 = 16$, $u = \pm 4$.

Следовательно, согласно теореме Виета, пара (x, y) — это корни уравнения $t^2 \pm 4t + 3 = 0$. Значит, (x, y) может быть только $(-3;-1)$, $(-1;-3)$, $(1;3)$, $(3;1)$. Легко видеть, что каждый из этих вариантов удовлетворяет исходной системе.

Задача 6. Вычислите $2 \operatorname{arctg} 3 + \arcsin \dfrac{3}{5}$.

Ответ: π.

Решение. *Первое решение.* Обозначим $\operatorname{arctg} 3$ через α, $\arcsin 3/5$ через β. Заметим, что $\beta \in (0, \pi/2)$, а $\operatorname{tg}^2 \beta = \sin^2 \beta/(1 - \sin^2 \beta) = 3^2/4^2$, откуда $\operatorname{tg} \beta = 3/4$; также $\operatorname{tg} \alpha = 3$, $\alpha \in (0, \pi/2)$.

Находим:

$$\operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{2 \cdot 3}{1 - 3^2} = -\frac{6}{8} = -\frac{3}{4}$$

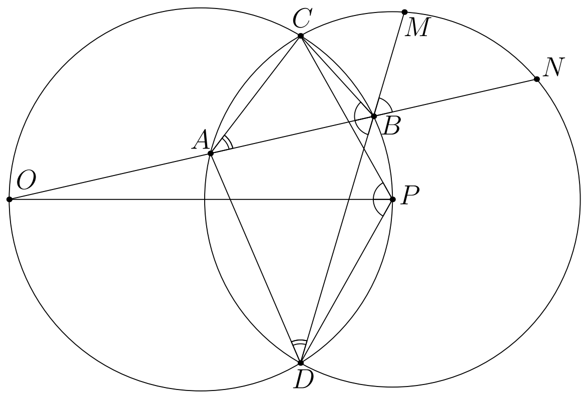
$$\operatorname{tg}(2\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}(2\alpha) + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg}(2\alpha) \operatorname{tg} \beta} = \frac{-3/4 + 3/4}{1 - (-3/4) \cdot (3/4)} = 0.$$

Наконец, поскольку $0 < \alpha < \pi/2$, $0 < \beta < \pi/2$, то $0 < 2\alpha + \beta < 3\pi/2$. Значит, $2\alpha + \beta = \pi$.

Задача 7. Пусть OP — диаметр окружности Ω, ω — окружность с центром в точке P и радиусом меньше, чем у Ω. Окружности Ω и ω пересекаются в точках C и D. Хорда OB окружности Ω пересекает вторую окружностью в точке A. Найдите длину отрезка AB, если $BD \cdot BC = 5$.

Ответ: $\sqrt{5}$.

Решение. Пусть N — вторая точка пересечения прямой OA с ω; M — вторая точка пересечения прямой DB с ω.



Заметим, что в силу симметрии относительно прямой OP, дуги OC и OD равны. Следовательно, $\angle ABC = \angle DBA$. Обозначим этот угол через α.

Тогда, из вписанности четырёхугольника $CBPD$, $\angle CPD = \angle CBD = 2\alpha$. Следовательно, поскольку P — центр ω, $\overset{\frown}{DA} + \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{DAC} = 2\alpha$. С другой стороны, $\overset{\frown}{DA} + \overset{\frown}{MN} = 2\angle DBA = 2\alpha$. Вычитая общую дугу $\overset{\frown}{DA}$, получаем, что $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{MN}$, откуда $\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{CN}$.

Значит, $\angle CAB = \angle ADB$, и треугольники ABC и DBA подобны по двум углам, откуда $AB/BC = BD/AB$, или $AB^2 = BC \cdot BD = 5$, $AB = \sqrt{5}$.

Задача 8. При каких значениях параметра a уравнение $x^3 + 6x^2 + ax + 8 = 0$ имеет не более двух решений?

Ответ: $[-15; +\infty)$.

Решение. Заметим, что $x = 0$ не является решением исходного уравнения. Поэтому оно равносильно уравнению $a = \dfrac{-x^3 - 6x^2 - 8}{x}$ (*). Обозначим правую часть через $f(x)$.

Заметим, что $f(x) \to -\infty$ при $x \to -\infty$ и $f(x) \to -\infty$ при $x \to +\infty$. Также $f(x)$ имеет вертикальную асимптоту $x = 0$.

Производная функции $f(x)$ равна $f'(x) = \dfrac{8}{x^2} - 2x - 6 = \dfrac{8 - 2x - 6x^2}{x^2} = -\dfrac{2(x-1)(x+2)^2}{x^2}$.

Значит, функция $f(x)$ на промежутке $(-\infty, -2]$ возрастает от $-\infty$ до $f(-2) = 12$; на промежутке $[-2, 0)$ — продолжает возрастать от 12 до $+\infty$; на промежутке $(0, 1]$ — возрастает от $-\infty$ до $f(1) = -15$; наконец, на промежутке $[1, +\infty)$ — убывает от -15 до $-\infty$.

Таким образом, каждое значение из промежутка $(-\infty; -15)$ функция $f(x)$ принимает ровно три раз; -15 — два раза; из промежутка $(-15; +\infty)$ — один раз. (Например, значение -15 функция примет один раз в точке 1, а второй раз — на промежутке $(-\infty, -2)$).

Следовательно, уравнение (*), а с ним и исходное уравнение, имеет не более двух решений при $a \in [-15; +\infty)$.

Задача 9. Федерация спортивной борьбы присвоила каждому участнику соревнования квалификационный номер. Известно, что во встречах борцов, квалификационные номера которых отличаются более, чем на 2 номера, всегда побеждает борец с меньшим номером. Турнир для 512 борцов проводится по олимпийской системе: в начале каждого дня бойцы разбиваются на пары, проигравший выбывает из соревнований (ничьих не бывает). Какой наибольший квалификационный номер может иметь победитель?

Ответ: 18.

Решение. Заметим, что борец с номером k может проиграть только борцу с номером $k+1$ или $k+2$, поэтому после каждого тура наименьший номер не может увеличиться больше, чем на 2 номера. На турнире с 512 участниками 9 туров, следовательно, номер победителя турнира не превосходит $1 + 2 \cdot 9 = 19$.

Предположим, что борец с номером 19 может победить. Тогда в первом туре должны выбыть борцы с номерами 1 и 2. Это возможно только если борец с номером 1 проиграл борцу с номером 3, а борец с номером 2 проиграл борцу с номером 4. Значит после первого тура борцы с номерами 3 и 4 останутся. Аналогично, после второго тура останутся борцы с номерами 5 и 6, после третьего — 7 и 8, ..., после восьмого — 17 и 18. Значит в последнем, финальном, бою встретятся борцы с номерами 17 и 18. Противоречие с предположением, что борец с номером 19 может победить.

Покажем, что борец с номером 18 может победить. Назовём борцов с номерами большими 18 *слабыми*. Пусть в туре с номером $k \leqslant 8$ борец с номером $2k-1$ проиграет борцу с номером $2k+1$, борец с номером $2k$ проиграет борцу с номером $2k+2$, борцы с номерами $2k+3$, ..., 18 победят каких-то слабых борцов, оставшиеся слабые борцы как-то сыграют между собой. Тогда после 8 туров останутся борцы с номерами 17 и 18, и в финальном бое борец с номером 18 победит.

Задача 10. Сторона основания правильной четырёхугольной пирамиды равна a, а высота — $a/2$. Найдите объём тела, ограниченного поверхностью этой пирамиды и сферами радиуса $a/3$ с центрами в вершинах основания этой пирамиды.

Ответ: $\dfrac{81-4\pi}{486}a^3$.

Решение. Рассмотрим куб со стороной a. Построим сферы радиуса $a/3$ с центрами во всех его вершинах. Объём V тела, ограниченного поверхностью куба и этими сферами равен $V = a^3 - \dfrac{4}{3}\pi\left(\dfrac{a}{3}\right)^3 = \dfrac{81-4\pi}{81}a^3$, поскольку объём общей части куба и шаров, ограниченных этими сферами, равен объёму шара радиуса $a/3$.

Соединим центр куба со всеми его вершинами. В результате получим 6 пирамид, удовлетворяющих условию задачи. Следовательно, искомый объём равен $\dfrac{V}{6} = \dfrac{81-4\pi}{486}a^3$.

Вариант III

Задача 1. Представьте в виде несократимой дроби

$$6\frac{3}{2015}\times 8\frac{11}{2016}-11\frac{2012}{2015}\times 3\frac{2005}{2016}-12\times\frac{3}{2015}.$$

Ответ: 11/112.

Решение. *Первое решение.* Обозначим $a=3/2015$, $b=11/2016$. Тогда

$$6\frac{3}{2015}\times 8\frac{11}{2016}-11\frac{2012}{2015}\times 3\frac{2005}{2016}-12\times\frac{3}{2015}=(6+a)(8+b)-(12-a)(4-b)-12a=$$
$$=48+8a+6b+ab-48+4a+12b-ab-12a=18b=18\cdot\frac{11}{2016}=\frac{18\cdot 11}{18\cdot 112}=\frac{11}{112}.$$

Второе решение. После замены смешанных дробей на обыкновенные, получаем, что исходное выражение равно

$$\frac{12093}{2015}\cdot\frac{16139}{2016}-\frac{24177}{2015}\cdot\frac{8053}{2016}-\frac{36}{2015}=\frac{195168927-194697381-72576}{2015\cdot 2016}=$$
$$=\frac{398970}{2015\cdot 2016}=\frac{2015\cdot 18\cdot 11}{2015\cdot 18\cdot 112}=\frac{11}{112}.$$

Задача 2. В $1^{\text{в}}$ классе каждого ребенка попросили написать два числа: количество его одноклассников и количество его одноклассниц (именно в таком порядке; сам себя ребенок не считает). Каждый ребенок одно число написал правильно, а в другом ошибся ровно на 2. Среди ответов были получены такие: $(12,18)$, $(15,15)$, $(11,15)$. Сколько мальчиков и сколько девочек в классе?

Ответ: 13 мальчиков и 16 девочек.

Решение. *Первое решение.* Обозначим детей, давших ответы $(12,18)$, $(15,15)$, $(11,15)$ через А, Б, В соответственно. Заметим, что если в классе m мальчиков, то первое число в ответах девочек имеет ту же чётность, что и m, а в ответах мальчиков — противоположную. Следовательно, дети Б и В одного пола, а А — другого.

Первые числа в ответах Б и В отличаются на 4, значит, они оба неправильные. Таким образом, количество одноклассников у Б и В равно 13, а количество одноклассниц — 15.

Если Б и В — мальчики, то в классе 14 мальчиков и 15 девочек. При этом у девочки А тогда 14 одноклассников и 14 одноклассниц, и ее ответ $(12,18)$ противоречит условию. Значит, Б и В — девочки, и в классе 13 мальчиков и 16 девочек.

Второе решение. Пусть какой-то ребёнок написал числа (m,d). Если бы оба числа он написал правильно, то он бы написал один из четырёх вариантов: $(m-2,d)$, $(m+2,d)$, $(m,d-2)$, $(m,d+2)$. Тогда, если этот ребёнок — мальчик, то есть четыре варианта количества мальчиков и девочек в классе: $(m-1,d)$, $(m+3,d)$, $(m+1,d-2)$ и $(m+1,d+2)$. Аналогично, если этот ребёнок — девочка; возможные варианты в этом случае: $(m-2,d+1)$, $(m+2,d+1)$, $(m,d-1)$, $(m,d+3)$.

Таким образом, каждый из ответов даёт нам восемь вариантов, сколько мальчиков и девочек могло быть в классе, один из которых должен быть верным:
для $(12,18)$ это $(11,18)$, $(15,18)$, $(13,16)$, $(13,20)$, $(10,19)$, $(14,19)$, $(12,17)$, $(12,21)$;
для $(15,15)$ это $(14,15)$, $(18,15)$, $(16,13)$, $(16,17)$, $(13,16)$, $(17,16)$, $(15,14)$, $(15,18)$;
для $(11,15)$ это $(10,15)$, $(14,15)$, $(12,13)$, $(12,17)$, $(\ 9,16)$, $(13,16)$, $(11,14)$, $(11,18)$.

Осталось заметить, что только вариант $(13,16)$ встречается во всех трёх строчках.

Задача 3. На доске написано несколько (больше одного) последовательных натуральных чисел, сумма которых равна 2016. Чему может равняться наибольшее из этих чисел?

Ответ: 63, 106, 228, 291 или 673.

Решение. Предположим, что для некоторого n нашлись n подряд идущих натуральных чисел a, $a+1, \ldots, a+(n-1)$, сумма которых равна 2016. Тогда $na+(n-1)n/2 = 2016$, или, после алгебраических преобразований, $n(2a+n-1) = 4032 = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 7$.

Заметим, что n и $2a+n-1$ имеют разную чётность. Поэтому, если n чётно, то n должно делится на $2^6 = 64$, откуда $n \geqslant 64$, $2a+n-1 \leqslant 4032/64 = 63$, что противоречит $2a+n-1 > n$.

Значит, n — нечётный делитель числа 4032, т.е. делитель числа 63. Проверим, что каждый из них подходит, и найдём соответствующее значение $a+(n-1)$. Если $n=3$: $2a+3-1 = 1344$, $a = 671$, $a+(n-1) = 673$; если $n=7$: $2a+7-1 = 576$, $a = 285$, $a+(n-1) = 291$; если $n=9$: $2a+9-1 = 448$, $a = 220$, $a+(n-1) = 228$; если $n=21$: $2a+21-1 = 192$, $a = 86$, $a+(n-1) = 106$; если $n=63$: $2a+63-1 = 64$, $a = 1$, $a+(n-1) = 63$.

Задача 4. В треугольнике ABC с отношением сторон $AB : AC = 5 : 2$ биссектриса угла BAC пересекает сторону BC в точке L. Найдите длину отрезка AL, если длина вектора $2 \cdot \overrightarrow{AB} + 5 \cdot \overrightarrow{AC}$ равна 2016.

Ответ: 288.

Решение. Заметим, что по свойству биссектрисы треугольника $BL : LC = BA : AC = 5 : 2$, откуда $\overrightarrow{BL} = 5/7 \cdot \overrightarrow{BC}$. Теперь,

$$\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BL} = \overrightarrow{AB} + \frac{4}{7} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{5}{7}\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) = \frac{2}{7} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{5}{7} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{7}\left(2 \cdot \overrightarrow{AB} + 5 \cdot \overrightarrow{AC}\right).$$

Следовательно, $|AL| = 1/7 \cdot \left|2 \cdot \overrightarrow{AB} + 5 \cdot \overrightarrow{AC}\right| = 1/7 \cdot 2016 = 288$.

Задача 5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 & = & 37 \\ x^4 + x^2y^2 + y^4 & = & 481 \end{cases}.$$

Ответ: $(-4; -3)$, $(-3, -4)$, $(3, 4)$, $(4, 3)$.

Решение. Заметим, что $x^4 + x^2y^2 + y^4 = (x^2+y^2)^2 - x^2y^2 = (x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$. Таким образом, исходная система эквивалентна $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 & = & 13 \\ x^2 + xy + y^2 & = & 37 \end{cases}$.

Сделаем замену: $u = x+y$, $v = xy$. Тогда из первого уравнения получаем, что $u^2 - 3v = 13$, а из второго — $u^2 - v = 37$. Значит, $v = 12$, а $u^2 = 49$, $u = \pm 7$.

Следовательно, согласно теореме Виета, пара (x, y) — это корни уравнения $t^2 \pm 7t + 12 = 0$. Значит, (x, y) может быть только $(-4; -3)$, $(-3; -4)$, $(3; 4)$, $(4; 3)$. Легко видеть, что каждый из этих вариантов удовлетворяет исходной системе.

Задача 6. Вычислите $2 \operatorname{arctg} 4 + \arcsin \dfrac{8}{17}$.

Ответ: π.

Решение. *Первое решение.* Обозначим $\operatorname{arctg} 4$ через α, $\arcsin 8/17$ через β. Заметим, что $\beta \in (0, \pi/2)$, а $\operatorname{tg}^2 \beta = \sin^2\beta/(1-\sin^2\beta) = 8^2/15^2$, откуда $\operatorname{tg}\beta = 8/15$; также $\operatorname{tg}\alpha = 4$, $\alpha \in (0, \pi/2)$.

Находим:

$$\operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{2 \cdot 4}{1-4^2} = -\frac{8}{15}$$

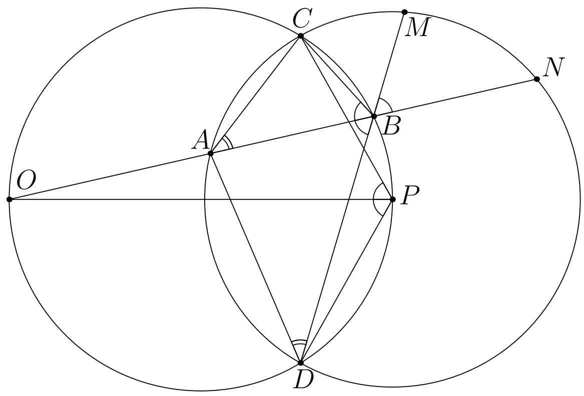
$$\operatorname{tg}(2\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}(2\alpha)+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}(2\alpha)\operatorname{tg}\beta} = \frac{-8/15+8/15}{1-(-8/15)\cdot(8/15)} = 0.$$

Наконец, поскольку $0 < \alpha < \pi/2$, $0 < \beta < \pi/2$, то $0 < 2\alpha+\beta < 3\pi/2$. Значит, $2\alpha+\beta = \pi$.

Задача 7. Пусть OP — диаметр окружности Ω, ω — окружность с центром в точке P и радиусом меньше, чем у Ω. Окружности Ω и ω пересекаются в точках C и D. Хорда OB окружности Ω пересекает вторую окружностью в точке A. Найдите длину отрезка AB, если $BD \cdot BC = 5$.

Ответ: $\sqrt{5}$.

Решение. Пусть N — вторая точка пересечения прямой OA с ω; M — вторая точка пересечения прямой DB с ω.



Заметим, что в силу симметрии относительно прямой OP, дуги OC и OD равны. Следовательно, $\angle ABC = \angle DBA$. Обозначим этот угол через α.

Тогда, из вписанности четырёхугольника $CBPD$, $\angle CPD = \angle CBD = 2\alpha$. Следовательно, поскольку P — центр ω, $\smile{DA} + \smile{AC} = \smile{DAC} = 2\alpha$. С другой стороны, $\smile{DA} + \smile{MN} = 2\angle DBA = 2\alpha$. Вычитая общую дугу $\smile{DA}$, получаем, что $\smile{AC} = \smile{MN}$, откуда $\smile{AM} = \smile{CN}$.

Значит, $\angle CAB = \angle ADB$, и треугольники ABC и DBA подобны по двум углам, откуда $AB/BC = BD/AB$, или $AB^2 = BC \cdot BD = 5$, $AB = \sqrt{5}$.

Задача 8. При каких значениях параметра a уравнение $x^3 + 6x^2 + ax + 8 = 0$ имеет ровно три решения?

Ответ: $(-\infty; -15)$.

Решение. Заметим, что $x = 0$ не является решением исходного уравнения. Поэтому оно равносильно уравнению $a = \dfrac{-x^3 - 6x^2 - 8}{x}$ (*). Обозначим правую часть через $f(x)$.

Заметим, что $f(x) \to -\infty$ при $x \to -\infty$ и $f(x) \to -\infty$ при $x \to +\infty$. Также $f(x)$ имеет вертикальную асимптоту $x = 0$.

Производная функции $f(x)$ равна $f'(x) = \dfrac{8}{x^2} - 2x - 6 = \dfrac{8 - 2x - 6x^2}{x^2} = -\dfrac{2(x-1)(x+2)^2}{x^2}$.

Значит, функция $f(x)$ на промежутке $(-\infty, -2]$ возрастает от $-\infty$ до $f(-2) = 12$; на промежутке $[-2, 0)$ — продолжает возрастать от 12 до $+\infty$; на промежутке $(0, 1]$ — возрастает от $-\infty$ до $f(1) = -15$; наконец, на промежутке $[1, +\infty)$ — убывает от -15 до $-\infty$.

Таким образом, каждое значение из промежутка $(-\infty; -15)$ функция $f(x)$ принимает ровно три раз; -15 — два раза; из промежутка $(-15; +\infty)$ — один раз. (Например, значение -15 функция примет один раз в точке 1, а второй раз — на промежутке $(-\infty, -2)$).

Следовательно, уравнение (*), а с ним и исходное уравнение, имеет ровно три решения при $a \in (-\infty; -15)$.

Задача 9. Федерация спортивной борьбы присвоила каждому участнику соревнования квалификационный номер. Известно, что во встречах борцов, квалификационные номера которых отличаются более, чем на 2 номера, всегда побеждает борец с меньшим номером. Турнир для 256 борцов проводится по олимпийской системе: в начале каждого дня бойцы разбиваются на пары, проигравший выбывает из соревнований (ничьих не бывает). Какой наибольший квалификационный номер может иметь победитель?

Ответ: 16.

Решение. Заметим, что борец с номером k может проиграть только борцу с номером $k+1$ или $k+2$, поэтому после каждого тура наименьший номер не может увеличиться больше, чем на 2 номера. На турнире с 256 участниками 8 туров, следовательно, номер победителя турнира не превосходит $1 + 2 \cdot 8 = 17$.

Предположим, что борец с номером 17 может победить. Тогда в первом туре должны выбыть борцы с номерами 1 и 2. Это возможно только если борец с номером 1 проиграл борцу с номером 3, а борец с номером 2 проиграл борцу с номером 4. Значит после первого тура борцы с номерами 3 и 4 останутся. Аналогично, после второго тура останутся борцы с номерами 5 и 6, после третьего — 7 и 8, …, после седьмого — 15 и 16. Значит в последнем, финальном, бою встретятся борцы с номерами 15 и 16. Противоречие с предположением, что борец с номером 17 может победить.

Покажем, что борец с номером 16 может победить. Назовём борцов с номерами большими 16 *слабыми*. Пусть в туре с номером $k \leqslant 7$ борец с номером $2k-1$ проиграет борцу с номером $2k+1$, борец с номером $2k$ проиграет борцу с номером $2k+2$, борцы с номерами $2k+3, \ldots, 16$ победят каких-то слабых борцов, оставшиеся слабые борцы как-то сыграют между собой. Тогда после 7 туров останутся борцы с номерами 15 и 16, и в финальном бое борец с номером 16 победит.

Задача 10. Сторона основания правильной четырёхугольной пирамиды равна a, а высота — $a/2$. Найдите объём тела, ограниченного поверхностью этой пирамиды и сферами радиуса $a/3$ с центрами во всех вершинах этой пирамиды.

Ответ: $\dfrac{81-8\pi}{486}a^3$.

Решение. Рассмотрим куб со стороной a. Построим сферы радиуса $a/3$ с центрами во всех его вершинах и в его центре. Объём V тела, ограниченного поверхностью куба и этими сферами равен $V = a^3 - \dfrac{8}{3}\pi\left(\dfrac{a}{3}\right)^3 = \dfrac{81-8\pi}{81}a^3$, поскольку объём общей части куба и шаров, ограниченных этими сферами, равен двум объёмам шара радиуса $a/3$.

Соединим центр куба со всеми его вершинами. В результате получим 6 пирамид, удовлетворяющих условию задачи. Следовательно, искомый объём равен $\dfrac{V}{6} = \dfrac{81-8\pi}{486}a^3$.

Вариант IV

Задача 1. Представьте в виде несократимой дроби

$$6\frac{7}{2015} \times 4\frac{5}{2016} - 7\frac{2008}{2015} \times 2\frac{2011}{2016} - 7 \times \frac{7}{2015}.$$

Ответ: 5/144.

Решение. *Первое решение.* Обозначим $a = 7/2015$, $b = 5/2016$. Тогда

$$6\frac{7}{2015} \times 4\frac{5}{2016} - 7\frac{2008}{2015} \times 2\frac{2011}{2016} - 7 \times \frac{7}{2015} = (6+a)(4+b) - (8-a)(3-b) - 7a =$$
$$= 24 + 4a + 6b + ab - 24 + 3a + 8b - ab - 7a = 14b = 14 \cdot \frac{5}{2016} = \frac{14 \cdot 5}{14 \cdot 144} = \frac{5}{144}.$$

Второе решение. После замены смешанных дробей на обыкновенные, получаем, что исходное выражение равно

$$\frac{12097}{2015} \cdot \frac{8069}{2016} - \frac{16113}{2015} \cdot \frac{6043}{2016} - \frac{49}{2015} = \frac{97610693 - 97370859 - 98784}{2015 \cdot 2016} =$$
$$= \frac{141050}{2015 \cdot 2016} = \frac{2015 \cdot 14 \cdot 5}{2015 \cdot 14 \cdot 144} = \frac{5}{144}.$$

Задача 2. В $1^{\text{г}}$ классе каждого ребенка попросили написать два числа: количество его одноклассников и количество его одноклассниц (именно в таком порядке; сам себя ребенок не считает). Каждый ребенок одно число написал правильно, а в другом ошибся ровно на 4. Среди ответов были получены такие: $(10, 14)$, $(13, 11)$, $(13, 19)$. Сколько мальчиков и сколько девочек в классе?

Ответ: 14 мальчиков и 15 девочек.

Решение. *Первое решение.* Обозначим детей, давших ответы $(10, 14)$, $(13, 11)$, $(13, 19)$ через А, Б, В соответственно. Заметим, что если в классе m мальчиков, то первое число в ответах девочек имеет ту же чётность, что и m, а в ответах мальчиков — противоположную. Следовательно, дети Б и В одного пола, а А — другого.

Вторые числа в ответах Б и В отличаются на 8, значит, они оба неправильные. Таким образом, количество одноклассников у Б и В равно 13, а количество одноклассниц — 15.

Если Б и В — девочки, то в классе 13 мальчиков и 16 девочек. При этом у мальчика А тогда 12 одноклассников и 16 одноклассниц, и его ответ $(10, 14)$ противоречит условию. Значит, Б и В — мальчики, и в классе 14 мальчиков и 15 девочек.

Второе решение. Пусть какой-то ребёнок написал числа (m, d). Если бы оба числа он написал правильно, то он бы написал один из четырёх вариантов: $(m-4, d)$, $(m+4, d)$, $(m, d-4)$, $(m, d+4)$. Тогда, если этот ребёнок — мальчик, то есть четыре варианта количества мальчиков и девочек в классе: $(m-3, d)$, $(m+5, d)$, $(m+1, d-4)$ и $(m+1, d+4)$. Аналогично, если этот ребёнок — девочка; возможные варианты в этом случае: $(m-4, d+1)$, $(m+4, d+1)$, $(m, d-3)$, $(m, d+5)$.

Таким образом, каждый из ответов даёт нам восемь вариантов, сколько мальчиков и девочек могло быть в классе, один из которых должен быть верным:
для $(10, 14)$ это $(7, 14)$, $(15, 14)$, $(11, 10)$, $(11, 18)$, $(6, 15)$, $(14, 15)$, $(10, 11)$, $(10, 19)$;
для $(13, 11)$ это $(10, 11)$, $(18, 11)$, $(14, 7)$, $(14, 15)$, $(9, 12)$, $(17, 12)$, $(13, 8)$, $(13, 16)$;
для $(13, 19)$ это $(10, 19)$, $(18, 19)$, $(14, 15)$, $(14, 23)$, $(9, 20)$, $(17, 20)$, $(13, 16)$, $(13, 24)$.

Осталось заметить, что только вариант $(14, 15)$ встречается во всех трёх строчках.

Задача 3. Сколько существует натуральных чисел $n > 1$, для которых найдутся n подряд идущих натуральных чисел, сумма которых равна 2016?

Ответ: 5.

Решение. Предположим, что для некоторого n нашлись n подряд идущих натуральных чисел a, $a+1, \ldots, a+(n-1)$, сумма которых равна 2016. Тогда $na+(n-1)n/2 = 2016$, или, после алгебраических преобразований, $n(2a+n-1) = 4032 = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 7$.

Заметим, что n и $2a+n-1$ имеют разную чётность. Поэтому, если n чётно, то n должно делится на $2^6 = 64$, откуда $n \geqslant 64$, $2a+n-1 \leqslant 4032/64 = 63$, что противоречит $2a+n-1 > n$.

Значит, n — нечётный делитель числа 4032, т.е. делитель числа 63. Проверим, что каждый из них подходит. Если $n=3$: $2a+3-1 = 1344$, $a = 671$; если $n = 7$: $2a+7-1 = 576$, $a = 285$; если $n = 9$: $2a+9-1 = 448$, $a = 220$; если $n = 21$: $2a+21-1 = 192$, $a = 86$; если $n = 63$: $2a+63-1 = 64$, $a = 1$. Всего вышло пять подходящих n.

Задача 4. В треугольнике ABC с отношением сторон $AB : AC = 7 : 2$ биссектриса угла BAC пересекает сторону BC в точке L. Найдите длину отрезка AL, если длина вектора $2\cdot\overrightarrow{AB} + 7\cdot\overrightarrow{AC}$ равна 2016.

Ответ: 224.

Решение. Заметим, что по свойству биссектрисы треугольника $BL : LC = BA : AC = 7 : 2$, откуда $\overrightarrow{BL} = 7/9 \cdot \overrightarrow{BC}$. Теперь,

$$\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BL} = \overrightarrow{AB} + \frac{7}{9}\cdot\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{7}{9}\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) = \frac{2}{9}\cdot\overrightarrow{AB} + \frac{7}{9}\cdot\overrightarrow{AC} = \frac{1}{9}\left(2\cdot\overrightarrow{AB} + 7\cdot\overrightarrow{AC}\right).$$

Следовательно, $|AL| = 1/9 \cdot \left|2\cdot\overrightarrow{AB} + 7\cdot\overrightarrow{AC}\right| = 1/9 \cdot 2016 = 224$.

Задача 5. Решите систему уравнений

$$\left\{\begin{array}{rcl} x^2+xy+y^2 & = & 23 \\ x^4+x^2y^2+y^4 & = & 253 \end{array}\right. .$$

Ответ: $\left(-\frac{\sqrt{29}+\sqrt{5}}{2}; -\frac{\sqrt{29}-\sqrt{5}}{2}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{29}-\sqrt{5}}{2}; -\frac{\sqrt{29}+\sqrt{5}}{2}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{29}-\sqrt{5}}{2}; \frac{\sqrt{29}+\sqrt{5}}{2}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{29}+\sqrt{5}}{2}; \frac{\sqrt{29}-\sqrt{5}}{2}\right)$

Решение. Заметим, что $x^4+x^2y^2+y^4 = (x^2+y^2)^2 - x^2y^2 = (x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$. Таким образом, исходная система эквивалентна $\left\{\begin{array}{rcl} x^2-xy+y^2 & = & 11 \\ x^2+xy+y^2 & = & 23 \end{array}\right.$.

Сделаем замену: $u = x+y$, $v = xy$. Тогда из первого уравнения получаем, что $u^2-3v = 11$, а из второго — $u^2 - v = 23$. Значит, $v = 6$, а $u^2 = 29$, $u = \pm\sqrt{29}$.

Следовательно, согласно теореме Виета, пара (x, y) — это корни уравнения $t^2 \pm \sqrt{29}t + 6 = 0$. Значит, (x, y) может быть только $\left(-\frac{\sqrt{29}+\sqrt{5}}{2}; -\frac{\sqrt{29}-\sqrt{5}}{2}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{29}-\sqrt{5}}{2}; -\frac{\sqrt{29}+\sqrt{5}}{2}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{29}-\sqrt{5}}{2}; \frac{\sqrt{29}+\sqrt{5}}{2}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{29}+\sqrt{5}}{2}; \frac{\sqrt{29}-\sqrt{5}}{2}\right)$. Каждый из этих вариантов удовлетворяет исходной системе.

Задача 6. Вычислите $2\operatorname{arctg} 5 + \arcsin\dfrac{5}{13}$.

Ответ: π.

Решение. *Первое решение.* Обозначим $\operatorname{arctg} 5$ через α, $\arcsin 5/13$ через β. Заметим, что $\beta \in (0, \pi/2)$, а $\operatorname{tg}^2\beta = \sin^2\beta/(1-\sin^2\beta) = 5^2/12^2$, откуда $\operatorname{tg}\beta = 5/12$; также $\operatorname{tg}\alpha = 5$, $\alpha \in (0, \pi/2)$.

Находим:

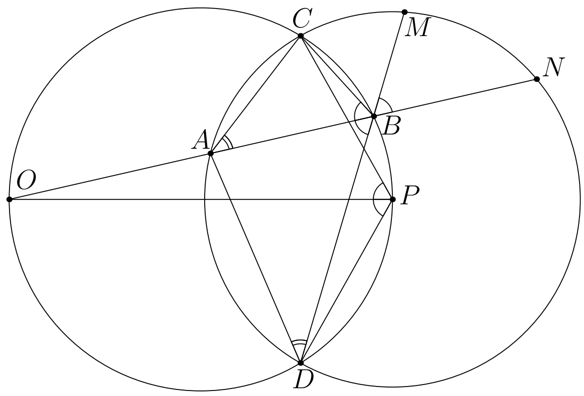
$$\operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{2\cdot 5}{1-5^2} = -\frac{10}{24} = -\frac{5}{12}$$
$$\operatorname{tg}(2\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}(2\alpha)+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}(2\alpha)\operatorname{tg}\beta} = \frac{-5/12+5/12}{1-(-5/12)\cdot(5/12)} = 0.$$

Наконец, поскольку $0 < \alpha < \pi/2$, $0 < \beta < \pi/2$, то $0 < 2\alpha+\beta < 3\pi/2$. Значит, $2\alpha+\beta = \pi$.

Задача 7. Пусть OP — диаметр окружности Ω, ω — окружность с центром в точке P и радиусом меньше, чем у Ω. Окружности Ω и ω пересекаются в точках C и D. Хорда OB окружности Ω пересекает вторую окружностью в точке A. Найдите длину отрезка AB, если $BD \cdot BC = 5$.

Ответ: $\sqrt{5}$.

Решение. Пусть N — вторая точка пересечения прямой OA с ω; M — вторая точка пересечения прямой DB с ω.



Заметим, что в силу симметрии относительно прямой OP, дуги OC и OD равны. Следовательно, $\angle ABC = \angle DBA$. Обозначим этот угол через α.

Тогда, из вписанности четырёхугольника $CBPD$, $\angle CPD = \angle CBD = 2\alpha$. Следовательно, поскольку P — центр ω, $\overset{\frown}{DA} + \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{DAC} = 2\alpha$. С другой стороны, $\overset{\frown}{DA} + \overset{\frown}{MN} = 2\angle DBA = 2\alpha$. Вычитая общую дугу $\overset{\frown}{DA}$, получаем, что $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{MN}$, откуда $\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{CN}$.

Значит, $\angle CAB = \angle ADB$, и треугольники ABC и DBA подобны по двум углам, откуда $AB/BC = BD/AB$, или $AB^2 = BC \cdot BD = 5$, $AB = \sqrt{5}$.

Задача 8. При каких значениях параметра a уравнение $x^3 + ax^2 + 13x - 6 = 0$ имеет более одного решения?

Ответ: $[-8; -20/3] \cup [61/8; +\infty)$

Решение. Заметим, что $x = 0$ не является решением исходного уравнения. Поэтому оно равносильно уравнению $a = \dfrac{-x^3 - 13x + 6}{x^2}$ (*). Обозначим правую часть через $f(x)$.

Заметим, что $f(x) \to +\infty$ при $x \to -\infty$ и $f(x) \to -\infty$ при $x \to +\infty$. Также $f(x)$ имеет вертикальную асимптоту $x = 0$.

Производная функции $f(x)$ равна $f'(x) = -\dfrac{x^3 - 13x + 12}{x^3} = -\dfrac{(x-3)(x-1)(x+4)}{x^3}$.

Значит, функция $f(x)$ на промежутке $(-\infty, -4]$ убывает от $+\infty$ до $f(-4) = 61/8$; на промежутке $[-4, 0)$ — возрастает от $61/8$ до $+\infty$; на промежутке $(0, 1]$ — убывает от $+\infty$ до $f(1) = -8$; на промежутке $[1, 3]$ — возрастает от -8 до $f(3) = -20/3$; наконец, на промежутке $[3, +\infty)$ — убывает от $-20/3$ до $-\infty$.

Таким образом, каждое значение из промежутка $(-\infty; -8)$ функция $f(x)$ принимает ровно один раз; -8 — два раза; из промежутка $(-8; -20/3)$ — три раза; $-20/3$ — два раза; из промежутка $(-20/3; 61/8)$ — один раз; $61/8$ — два раза; из промежутка $(61/8; +\infty)$ — три раза. (Например, значение -8 функция примет один раз в точке 1, а второй раз — на промежутке $(3, +\infty)$).

Следовательно, уравнение (*), а с ним и исходное уравнение, имеет более одного решения при $a \in [-8; -20/3] \cup [61/8; +\infty)$.

Задача 9. Федерация спортивной борьбы присвоила каждому участнику соревнования квалификационный номер. Известно, что во встречах борцов, квалификационные номера которых отличаются более, чем на 2 номера, всегда побеждает борец с меньшим номером. Турнир для 512 борцов проводится по олимпийской системе: в начале каждого дня бойцы разбиваются на пары, проигравший выбывает из соревнований (ничьих не бывает). Какой наибольший квалификационный номер может иметь победитель?

Ответ: 18.

Решение. Заметим, что борец с номером k может проиграть только борцу с номером $k+1$ или $k+2$, поэтому после каждого тура наименьший номер не может увеличиться больше, чем на 2 номера. На турнире с 512 участниками 9 туров, следовательно, номер победителя турнира не превосходит $1 + 2 \cdot 9 = 19$.

Предположим, что борец с номером 19 может победить. Тогда в первом туре должны выбыть борцы с номерами 1 и 2. Это возможно только если борец с номером 1 проиграл борцу с номером 3, а борец с номером 2 проиграл борцу с номером 4. Значит после первого тура борцы с номерами 3 и 4 останутся. Аналогично, после второго тура останутся борцы с номерами 5 и 6, после третьего — 7 и 8, ..., после восьмого — 17 и 18. Значит в последнем, финальном, бою встретятся борцы с номерами 17 и 18. Противоречие с предположением, что борец с номером 19 может победить.

Покажем, что борец с номером 18 может победить. Назовём борцов с номерами большими 18 *слабыми*. Пусть в туре с номером $k \leqslant 8$ борец с номером $2k-1$ проиграет борцу с номером $2k+1$, борец с номером $2k$ проиграет борцу с номером $2k+2$, борцы с номерами $2k+3, \ldots, 18$ победят каких-то слабых борцов, оставшиеся слабые борцы как-то сыграют между собой. Тогда после 8 туров останутся борцы с номерами 17 и 18, и в финальном бое борец с номером 18 победит.

Задача 10. Сторона основания правильной четырёхугольной пирамиды равна a, а высота — $a/2$. Найдите объём тела, ограниченного поверхностью этой пирамиды и сферами радиуса $a/3$ с центрами во всех вершинах этой пирамиды.

Ответ: $\dfrac{81-8\pi}{486}a^3$.

Решение. Рассмотрим куб со стороной a. Построим сферы радиуса $a/3$ с центрами во всех его вершинах и в его центре. Объём V тела, ограниченного поверхностью куба и этими сферами равен $V = a^3 - \dfrac{8}{3}\pi\left(\dfrac{a}{3}\right)^3 = \dfrac{81-8\pi}{81}a^3$, поскольку объём общей части куба и шаров, ограниченных этими сферами, равен двум объёмам шара радиуса $a/3$.

Соединим центр куба со всеми его вершинами. В результате получим 6 пирамид, удовлетворяющих условию задачи. Следовательно, искомый объём равен $\dfrac{V}{6} = \dfrac{81-8\pi}{486}a^3$.